Unidad 3 Aplicaciones

<u>Ley de Crecimiento y Decrecimiento exponencial (crecimiento de una variable con respecto a otra es una derivada) y/o desintegración radiactiva:</u>

$\frac{dy}{dx} \cdot \alpha \cdot y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = ky}$ donde k es la constante de proporcionalidad, de esta ED por separación de variables, se obtiene la solución general que es del tipo: $Y = Ce^{kx}$ donde k si es positiva entonces crece y si es negativa entonces decrece el fenómeno.

Los problemas presentan condiciones iniciales que sustituyéndolas en la solución general me permitirán encontrar las constantes C y k para obtener la solución particular.

Ley de Enfriamiento de Newton (sólo es aplicable para el cuerpo en cuestión)

Relación entre la temperatura de los cuerpos y la del ambiente.

$\boxed{\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_\infty)}$ donde T es la temperatura del cuerpo y T_∞ es la temperatura del ambiente, que normalmente no cambia.

Esta ED se resuelve por separación de variables para obtener la solución general y después se emplearan las condiciones iníciales para obtener la solución particular.

Segunda ley de Newton

La rapidez de cambio del momento en un tiempo dado es directamente proporcional a la fuerza a la aplicada al cuerpo en movimiento.

$\boxed{m\frac{dv}{dt} = kF}$; Puesto que $a = \frac{dv}{dt}$, entonces tenemos que: $F = \frac{ma}{k}$ donde k depende del sistema de unidades que se utilice; en nuestro caso $k = 1$.

Circuitos serie RC y RL:

En estos circuitos serie tanto RC como RL se obtendrá la suma de los voltajes de cada elemento (RC y RL en cada caso) igualándolos al voltaje de la fuente, obteniendo así una ED de primer orden que se tendrá que resolver por factor integrante.

$E = RI$ ley de ohm aplicado a resistencias

$E = L\frac{dI}{dt}$ voltaje del inductor

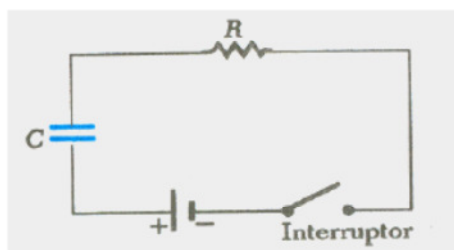
$E = \frac{q}{c}$ Voltaje del capacitor

$I = \frac{dq}{dt}$ corriente

R, L y $\frac{1}{c}$ son constantes.

Ejemplo de ED para un RC

$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E}$$



En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento de población es proporcional al número presente en cualquier instante. Si se sabe que el numero original se ha duplicado en 6 hrs, ¿qué número se debe esperar al cabo de 12 hrs.?

P = # de Bacterias

$$\frac{dP}{dt} = KP$$ separación de variables

$$\frac{dP}{P} = k\,dt \xrightarrow{\int} \ln P = Kt + C$$

Aplicando la exponencial

$$P(t) = e^{Kt+C} = Ce^{kt} \qquad \boxed{P(t) = Ce^{kt}}$$

Considerando al inicio

$t = 0$ $\quad P(0) = P_0$

$$P_0 = Ce^{k(0)}$$

$$\boxed{C = P_0}$$

Entonces

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Empleando la 2ª Condición

$t = 6$ hrs.

$$P(6) = 2P_0$$

sust. en ED

$$2\cancel{P_0} = \cancel{P_0}\, e^{K(6)}$$

$$2 = e^{K(6)}$$

Aplicando Ln

$$\ln(2) = K(6)$$

$$K = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155$$

$$P(t) = P_0 e^{0.115t}$$ sust $t = 12$

$$\boxed{P(t) = 4P_0}$$

Según la Ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura To del aire. Si la temperatura del aire es de 20℃ y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100° hasta 60°, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30℃?

T_0 = Temperatura del ambiente = 20°

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20)$$

$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt \quad \text{aplicando } \int$$

$$\ln(T-20) = Kt + C \quad \text{aplicando } e$$

$$T - 20 = Ce^{kt}$$

$$\boxed{T(t) = Ce^{kt} + 20}$$

$t = 0 \quad T = 100°$

Sust en ED

$$100 = Ce^{k(0)} + 20$$

$$\boxed{C = 80}$$

$$\boxed{T(t) = 80e^{kt} + 20}$$

$t = 20$ min $\quad T = 60°$

$$60 = 80e^{k(20)} + 20$$

$$k = -0.0347$$

$$T(t) = 80e^{-0.034t} + 20$$

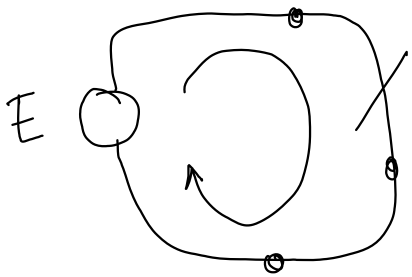
$T = 30$

$$30 = 80e^{-0.034t} + 20$$

$t = 60$ min.

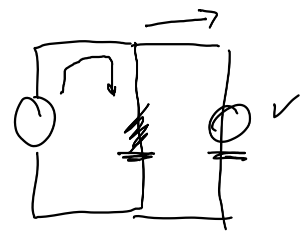
~~Una masa de 30g cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad. Calcular la distancia que viaja y la velocidad que consigue 3 s después de iniciar su movimiento.~~

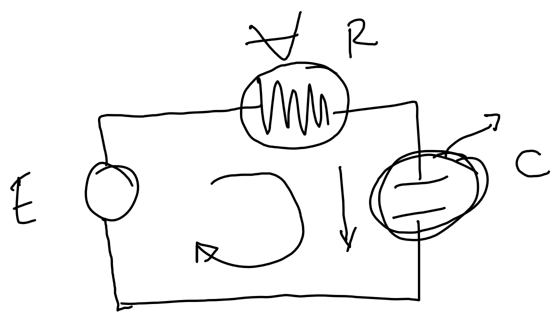
CIRCUITOS RC y RL SERIE



Ley ohm

$$I = \frac{V}{R}$$





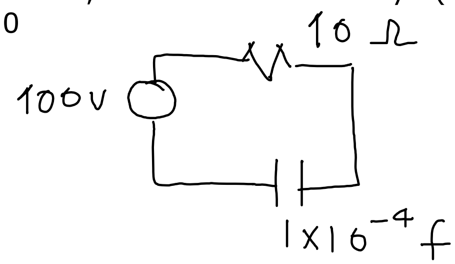
$$E_T = E_R + E_C$$

Voltaje

$$E_R = RI \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

$$E_C = \frac{q}{C}$$

En un circuito R-C se tienen los siguientes datos: R = 10 ohms, C = 0.0001 faradios y E(t) = 100 volts. Calcular q(t) e i(t) suponiendo que q = 0 para t = 0



$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$100 = 10\frac{dq}{dt} + \frac{q}{10^{-4}}$$